3) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -1 \\ 2x_1 + 4x_2 = 1 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $m = n = 2$

$\Rightarrow$ Le système est réduit, mais les vecteurs ne forment pas une base de A $\Rightarrow$ Pas de solution.

4) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 = -2 \\ -x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$ $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $m = n = 2$

$rg(A,B) = 2 = m = n$ donc unicité de solution.

5) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ $m = n = 2$

$rg(A,B) = rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ le système n'est pas réduit

6) Le système réduit : $(1\ 1)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (1)$ $m = 1$, $n = 2$ $\Rightarrow$ le système est sous déterminé $\Rightarrow \exists$ infinité de solution

Théorème ($n = m$)

soit $E : AX = B$ (~~un système~~) de taille $m = n$, alors les 4 propriétés suivantes sont équivalentes

1) $\forall B \in \mathbb{R}_n$ le système (E) admet une unique solution X.

2) La matrice A est inversible ($\det A \neq 0$)

3) Le système homogène (E') $(A \cdot X = 0)$ associé à E admet le vecteur null comme solution évidente.

4) $rg(A) = n$; on appelle A : matrice de rang plein

Remarque si $A \Leftrightarrow B$ alors $A \Rightarrow B$ et B ou $(A) \Rightarrow$ non(B), En utilise le théorème précédent pour vérifier l'existence et l'unicité de sol^{n} pour un système B ou le contraire, en vérifiant la propriété le plus facile à calculer.

(on a $A \Rightarrow B$. et non$(A) \Rightarrow$ non(B))

Scanné avec CamScanner

I. Méthode des résolution direct :

1. Méthode de Cramer :

Soit $E : AX = B$ un système linéaire de taille n avec $\det A \neq 0$

alors pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, x_i est donné par : $\forall i = 1 \dots n.\ x_i = \dfrac{\det(A_i)}{\det(A)}$

avec A_i est obtenu ~~par~~ a partir de la matrice A en remplaçons la colone i par le vecteur B.

Exp :

$$(E) : \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

1/ Forme matricielle
2/ verifier si (E) admet une solution
3/ si oui resoudre par Cramer

Rep :

1/
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

2/ $\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$

$= 0 - 2(-1) - 1(+1)$ ~~$= 1 + (+2)$~~

$= 2 - 1 = 1 \neq 0$

$\Rightarrow$ on conclure que le système (E) admet une unique solution

$$\det(A) = \sum_{i \text{ ou } j} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

avec A_{ij} : obtenu à partir de A en supprimant la ligne i et la colonne j

si i ou j : fixe
si i fixe $\leftrightarrow$ $j = 1 \dots n$
si j fixe $\leftrightarrow$ $i = 1 \dots n$

3/ $x_1 = \dfrac{\det A_1}{\det(A)} = \det(A_1) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$

pour $\det(A) = 1$

$= 0 + (-1) + 2(+1) = 1$

$x_2 = \dfrac{\det(A_2)}{\det(A)} = \det(A_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$

$= -1 - 2(-5) - 3 = 6$

$x_3 = \det(A_3) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + (+1) \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2(-3) + 2$

$= 3$

Scanné avec CamScanner

Cl: $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

2. Methode de Gauss à Pivot simple:

Soit $E: AX = B$ un système linéaire de taille n la resolution par Gauss à pivot simple se déroule en deux étapes : une première étape consiste à transformer le système (E) en un système équivalent (E'): $A'X = b'$ avec A' est une matrice triangulaire (inferieur ou superieur au choix) l'étape s'appelle étape d'élimination ou étape de triangulisation.

Une fois on a obtenu le système (E') on passe à l'étape 2: qui est une étape de resolution qui permet d'obtenir X en respectant un sens de résolution précis (de X_1 vers X_n si A' est une matrice triangulaire inferieur)
de X_n vers X_1 si A' est une matrice triangulaire superieur)

Ex:

1) Considérant le système precedent transformer E en un système equivalent E' à matrice triangulaire superieur
2) Calculer $\det(A')$
3) resoudre (E')

Rep:

-1- $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \quad (L_1) \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \quad (L_2) \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 2 \quad (L_3) \end{cases}$

* itération $i = 1$; on cherche à mettre 0 à les coefficients de x_1 dans les lignes (L_2) et (L_3) Pour cela les lignes suivantes

$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 + L_1$

Le système devient $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_2 - 3x_3 = -3 \\ x_3 = 3 \end{cases}$

* itération $i = 2$; on cherche à mettre 0 à les coefficients de x_2 dans la ligne (L_3)

$L_3 \leftarrow L_3$

-2- $\det(A') = 1 \times 1 \times 1 = 1 \neq 0$

Scanné avec CamScanner

3- Resolution

$x_3 = 3$

$x_2 = 3x3 - 3 = 6$

$x_1 = 1 - 2x3 + 6 = 1$

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

-a- Etape d'élimination :

Dans l'étape d'élimination on transforme A et b en A' et b' avec A' est une matrice triangulaire, le processus d'élemination est un processus itérative

- pour un système de taille n on a besoins de (n-1) itération.

Au début d'une itération i donnée ($1 \leq i \leq n-1$) on commence par désigner pivot qui est le coefficient a_{ii} de la matrice A ; si le pivot est non nul, le traitement consistent à éliminé les coefficients de la matrice A qui se situe sur la colonne numéro i entre la ligne i+1 à n.

Pour Cela en utilisent l'opération sur les lignes uniquement (multiplication, soustraction, . . .).

Pour annulé un coefficient de la colonne i qui se trouve sur la ligne j ($i+1 \leq j \leq n$) on feint l'opération suivante : pivot $\leftarrow a_{ii}$

$$L_j \leftarrow L_j - \frac{a_{ji}}{pivot} L_i$$

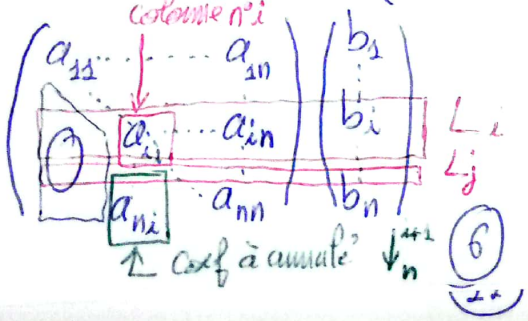
Rq:

L_i : C'est la ième ligne de la matrice (A, b) $(a_{i1} \dots a_{in}\ b_i)$

L_j : C'est la jème ligne de la matrice (A, b) $(a_{j1} \dots a_{jn}\ b_j)$

Pour faire un chémin pour mieux comprendre le chose:

- Au debut d'une itération i (de 1 à n-1) A et b ont la forme :



Exercice :

Ecrire un algorithme qui permet d'obtenir A' et b' à partir de A et b avec A est une matrice de taille n et A' est une matrice triangulaire supérieure par la méthode de Gauss à pivot simple.

Rep :

Algorithme Pivot de Gauss Simple :

Entrées : $A \in M_n$, $b \in \mathbb{R}^n$

Sorties : $A' \in M_n$, $b' \in \mathbb{R}^n$

```
Debut :
    pour i de 1 à n-1 faire :
        pivot ← a_ii
        si (pivot == 0) alors :
            Afficher("Impossible d'appliquer la methode")
            exit.
        Fin si
        Pour j de i+1 à n faire :
            L_j ← L_j - (a_ji / pivot) L_i
        Fin Pour
    Fin Pour
    Det = 1
    Pour i de 1 à n faire :
        Det ← Det x a_ii
    fin pour
    Afficher("Le determinant de A est : " Det);
    A' ← A
    b' ← b
    retourner (A', b')
Fin
```


Scanné avec CamScanner

L'étape 2 consiste à rechercher le système équivalent (E') : $A'X = b'$ avec A' est triangulaire.

Exercice :

Soit (E') : $A'x = b'$ avec A' est une matrice triangulaire supérieur.

- 1- Donner la forme générale matricielle de (E').
- 2- Écrire (E') sous la forme d'un système d'équation (équation 1 → équation n)
- 3- À partir de chaque équation numéro i exprimer x_i égale combien elle est des autres variable ainsi que la condition de calcul.
- 4- Proposer une méthode permettant de calculer les coefficient du vecteur X

indication : le calcule se fait coefficient par coefficient, Préciser par quel coefficient on doit commencer le calcul (c-à-d l'initialisation) et le sens dans lequel on doit procéder ainsi que la formule. Finalement, traduisez le travail en algorithme qui permet d'obtenir X à partir de A et B avec A est triangulaire supérieur.

Rq :

- Pour obtenir le résultat de la transformation on a 2 possibilités :
  - * 1ère possib. : déclarer A' et b' différent de A et b dans lequel on fait tous les travail
    - Avantage : sauvegarder A et b initial
    - inconvénient : consomme utilise plus de mémoire
  - * 2ème possib. : se travailler directement sur A et b
    - Avantage : on utilise un espace mémoire
    - inconvénient : perd les valeurs initiales de A et b

Reponse :

1- S

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Scanné avec CamScanner

2 - (E') :
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{33}x_3 + a_{34}x_4 + \dots + a_{3n}x_3 = b_3 \\ \vdots \\ a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 = b_1 - (a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n) \\ a_{22}x_2 = b_2 - (a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n) \\ a_{33}x_3 = b_3 - (a_{34}x_4 + \dots + a_{3n}x_n) \\ \vdots \\ a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

si pour tout $i : 1 \to n$; $a_i \neq 0$:
$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{a_{11}} \left[b_1 - (a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n) \right] \\ x_2 = \frac{1}{a_{22}} \left[b_2 - (a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n) \right] \\ x_3 = \frac{1}{a_{33}} \left[b_3 - (a_{34}x_4 + \dots + a_{3n}x_n) \right] \\ \vdots \\ x_n = \frac{b_n}{a_{nn}} \end{cases}$$

- on doit commencer par calculer x_n (initialement) : $x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}$

Ensuite, pour i de n-1 à 1 (pas = -1)
$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - (a_{i,i+1}x_{i+1} + \dots + a_{in}x_n) \right]$$
$$= \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j \right]$$

$$\begin{cases} \text{Initial : } x_n = \frac{b_n}{a_{nn}} \\ \text{Pour i de n-1 à 1 (pas=-1)} \\ x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=i+1} a_{ij}x_j \right) \end{cases}$$
pour écrire l'algo.

* Algorithme : Résolution de système à matrice triangulaire supérieure :
* Entrées : matrice $A \in \mathcal{M}_n$, $b \in \mathbb{R}^n$
* sorties : $X \in \mathbb{R}^n$
début :
$x_n \leftarrow \frac{b_n}{a_{nn}}$
pour i de n-1 à 1 (pas = -1) faire :
$x_i \leftarrow \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j \right)$
Fin Pour
retourner (X)
fin

Scanné avec CamScanner

.3. Méthode de Gauss à Pivot Partiel :

Dans le but d'éviter le blocage de l'algorithme de Gauss à Pivot simple (si le pivot est nul) l'algorithme de Gauss à Pivot Partiel consiste à insérer au début de chaque itération i une étape de recherche de Pivot : Au début de chaque itération i $(1 \leq i \leq n-1)$ on va parcourir la colonne i de la ligne i jusqu'à la ligne n en cherchant le coefficient le plus grand en valeur absolu.
Supposons que le coefficient positionné à la ligne k et à la colonne i
si k est égale à i $(k == i)$: pas de Permutation à faire.
si k est différent de i : à ce moment il faut ramener le coeff a_{ki} à la position de pivot qui (i,i). Pour cela on Permut la ligne i avec la ligne k

$L_i \rightleftharpoons L_k$ et on continue l'élimination comme dans l'algorithme de gauss à pivot simple.

Rq :

La Permutation de ligne doit être effectué simultanément sur A et b c-à-d que la permutation de ligne à des conséquence sur A et b par contre X reste inchangé.

Pour Programmer ça il faut créer une fonction de recherche de Pivot Partiel qui permet de retourner un entier k tel que : $|a_{ki}| = \max_{j=i,\dots,n} \{|a_{ji}|\}$

Rep :

Algorithme : Recherche de Pivot Partiel

Entrées : $A \in M_n(\mathbb{R})$; $i \in [1, \dots, n-1]$
sortie : $k \in [i, \dots, n]$
début :
  $k \leftarrow i$
  Pour j de $i+1$ à n faire
    si $(|a_{ki}| < |a_{ji}|)$ alors
      $k \leftarrow j$
    Fin Si
  Fin Pour
  retourn k
Fin

①	5
②	1
③	-4
④	-5
⑤	2

retourner ①
si $a_{i1} < a_{j1}$ => retourner ④

Scanné avec CamScanner

Algo : Élimination Gauss pivot Partiel

Entrée : $A \in M_{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$

sortie : $A \in M_{n\times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$

Début :

Pour i de 1 à n-1 faire

| $k \leftarrow$ Recherche de Pivot Partiel(A, i)

| Si $(k != i)$ alors

| { $L_k \rightleftharpoons L_i$

| }

| Fin Si

| Pivot $\leftarrow a_{ii}$

| Si $(pivot == 0)$ alors

| { "Pivot NULL la méthode n'est pas applicable")

| exit

| }

| Fin Si

| Pour j de i+1 à n faire

| $L_j \leftarrow L_j - \frac{a_{ji}}{pivot} L_i$

| Fin Pour

Fin Pour

Retourner (A, b)

Fin.

Application :

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ -x_1 + x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$$

1/ Forme matricielle.

2/ Faire tourner l'algo sur l'exemple.

3/ Donner $AX = b$ après l'élimination.

4/ Résoudre.

Scanné avec CamScanner

Rep :

-1- $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

-2- • $n = 3 \Rightarrow$ Il faut 2 itérations pour transformer le système

* itération $i = 1$: • on va chercher dans la colonne 1 de la ligne 1 à 3 ligne

($|a_{11}| = 1 < |a_{21}| = 2$ alors $k \leftarrow 2$ numéro de la ligne) ← • la fct recherche pivot partiel retourner $k = 2$

$k \neq i$ $(k = 2 ; i = 1)$

il faut permuter la ligne 2 avec la ligne 1

$L_1 \rightleftarrows L_2$

Le système après permutation est : $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

Pivot ~~= 2~~ $\neq 0$

Elimination de la ligne 2 et la ligne 3 ($j = 2$, $j = 3$)

$L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2} L_1$

$L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{2} L_1$

Le système après l'élimination est : $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

$2 - \frac{1}{2}$; $1 + \frac{1}{2}$; $-1 + \frac{1}{2}$; $1 - \frac{1}{2}$; $-1 + \frac{1}{2}$; $2 - \frac{1}{2}$

* itération $i = 2$: • on va chercher dans la colonne 2 entre la ligne 2 et la ligne 3

($|a_{22}| = \frac{1}{2} < |a_{32}| = \frac{1}{2}$ alors $k \leftarrow 3$ numéro de ligne) ← • la fct recherche pivot partiel retourner $k = 2$

$i = k$

pas de permutation

pivot $= -\frac{1}{2} \neq 0$

Scanné avec CamScanner

Élimination: $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3/2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

-3- Le système après l'élimination de Gauss à pivot Partiel:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3/2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

-4-
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 \\ -\frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 = \frac{3}{2} \\ x_3 = 3 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 6 \\ x_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

-4- Méthode de Gauss à Pivot totale:

Dans le même but d'éviter les valeurs faible et nulle, la méthode de Gauss à Pivot totale consiste à insérer au début de chaque étabation i d'élimination une étape de recherche de Pivot, la recherche de Pivot sera effectué dans une zone plus large que celle dans la méthode de Gauss à Pivot Partiel.

La zone de recherche dans le cas de Pivot totale à une itération i donnée c'est la sous-matrice de A en parcourant de la ligne i jusqu'à la ligne n et de la colone i jusqu'à la colonne n (intersection des lignes avec les colonnes)

La fct de recherche de Pivot total retourner un couple d'entier k et l tel que

$$|a_{kl}| = \max_{\substack{j=i\dots n \\ l=i\dots n}} \{|a_{jl}|\}$$

k: numéro de ligne; l: numéro de colonne

Si le couple $[i,i) \neq (k,l)]$ il faut ramener a_{kl} à la position de pivot qui est (i,i) en utilisant la permutation de ligne et la permutation de colonne

Scanné avec CamScanner

$$\begin{cases} \text{si } (i \neq k) \text{ alors } L_k \rightleftarrows L_i \text{ (ligne)} \\ \text{si } (i \neq l) \text{ alors } C_i \rightleftarrows C_l \text{ (colonne)} \end{cases}$$

Rq :

* La permutation des ligne à des conséquences sur A et b et X reste inchangé
* La permutation des colonne à des conséquences sur A et X et b reste inchangé

Rappelons que le système écrit sous la forme :

$$(\Sigma) : b = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{a_i}$$ ← Vecteurs colonne de A

$$X = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e_i}$$ ← vecteur colonne de la base canonique de $\mathbb{R}^n$

b	X
$x_1 \rightarrow \vec{a_1}$	$x_1 \rightarrow \vec{e_1}$
$x_i \rightarrow \vec{a_i}$	$x_i \rightarrow \vec{e_i}$
$x_l \rightarrow \vec{a_l}$	$x_l \rightarrow \vec{e_l}$

Exercice :

on va reprendre l'exp precedent et on va resoudre par méthode de Gauss à pivot totale.

Rep :

Recherche de pivot

T[1]	1
T[2]	2
T[3]	3

1 -
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$n = 3 \Rightarrow$ Il faut 2 itérations pour transformé A en une matrice triangulaire supérieur

Scanné avec CamScanner

* itération $i = 1$: Lecture ligne par ligne ($<$)

La fct Recherche de Pivot retourne le couple $(k, l) = (1, 3)$

* $(i = 1) = (k = 1)$: pas de Permutation de ligne
* $(i = 1) \neq (l = 3)$: permutation de la colonne 1 par la colonne 3 $C_1 \rightleftharpoons C_3$ $T[1] \rightleftharpoons T[3]$

Le système après la permutation du colonne devient :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \text{pivot} = 2 \neq 0$$

↪ Élimination

on va éliminer les ligne :

$j = 2$; $L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2} L_1$

$j = 3$; $L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{2} L_1$

le système après l'élimination devient

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

3	2	1

on va rechercher le pivot dans ce zone

* itération $i = 2$:

La fct Recherche de Pivot retourne le couple $(k, l) = (2, 3)$

* $(i = 2) = (k = 2)$ pas de permutation
* $(i = 2) \neq (l = 3)$: $C_2 \rightleftharpoons C_3$ $T[2] \rightleftharpoons T[3]$

Après la permutation le système devient :

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

T | 3 | 1 | 2 |

pivot $= \frac{3}{2} \neq 0$

Élimination :

$j = 3$: $L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{3} L_2$; le système après l'élimination :

$$A \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \\ 2 \end{pmatrix}$$

T | 3 | 1 | 2 |

Scanné avec CamScanner

$$\begin{cases} x_2 = 6 \\ x_1 = 1 \\ 2x_3 + x_1 - x_2 = 1 \Rightarrow x_3 = 2 \end{cases} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

pour rendre la tâche de la programation plus facile, il est préférable d'utiliser un tableau d'entier T qui contient comme initialisation $T[i] = i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$

$$X = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e_i} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_{T[i]}$$

$$b = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{a_i} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{a}_{T[i]}$$

Dans l'élimination, si à une itération i donné $i \in [\![1, n-1]\!]$ on doit permuter la colonne i avec une colonne l $(C_i \leftrightarrow C_l)$ on doit associé à faire au même temps, la permutation de la contenu de la case i avec la case l de tableau T.

A la fin de l'élimination on récupere A qui est une matrice superieur triangulaire et le tableau T. En commence par resoudre le système $Ay = b$

$\Rightarrow$ élimination (A, b, T) :

- 1. résoudre $Ay = A\begin{pmatrix} y_1 \\ y_n \end{pmatrix} = b \Rightarrow y$

pour obtenir x notre système initiale on fait $X = \sum_{i=1}^{n} y_i \vec{e}_{T[i]}$

(W) $A\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{2} \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$

$X = y_1 e_{T[1]} + y_2 e_{T[2]} + y_3 e_{T[3]}$

$= y_1 \vec{e_3} + y_2 \vec{e_1} + y_3 \vec{e_2}$

$= \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

Algo élimination pivot-total

Entrée A, b

sortie A, b, T

Début

pour i de 1 à n faire

$T[i] = i$

Fin pour

Scanné avec CamScanner

```
pour i de 1 à n-1 faire
|(k,l) ← Recherche pivot-total(A,i)
|si (i ≠ k) alors :
|  { L_i ⇄ L_k
|  }
|Si (i ≠ l) alors
|  { C_i ⇄ C_l
|    T[i] ⇄ T[l]
|  }
|  pivot ← a_ii
|}
|Si pivot ! = 0 alors
|  pour j de i+1 à n faire
|    L_j ← L_j - (a_ji / pivot) L_i
|  Fin Pour
|Fin Si
Fin Pour
```

Le principe de la méthode L.U est décrire la matrice A de système $AX = b$ (de taille n) comme un produit de deux matrices $A = L.U$ avec L est une matrice triangulaire ayant des 1 sur la diagonale

U est une matrice triangulaire supérieur. si ce possible

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ l_{21} & 1 & \\ \vdots & \ddots & \ddots \\ l_{n1} & \cdots & l_{n,n-1} \; 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \text{ lower}$$

$$U = \begin{pmatrix} u_{11} & \cdots & u_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & u_{nn} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}) \text{ upper}$$

si A s'écrit de cette façons (c-à-d A s'écrit de la forme L.U.

pour resoudre (E) on procedent 2 étape :

on pose $Y = UX$

$(\mathcal{E}_1)$: $LY = b \Rightarrow Y$ sachant Y connu

$(\mathcal{E}_2)$: $UX = Y \Rightarrow X$

Scanné avec CamScanner

$(\mathcal{E}_1)$ et $(\mathcal{E}_2)$ sont facile de resoudre de faite que $(\mathcal{E}_1)$ et $(\mathcal{E}_2)$ sont deux matrices triangulaires.

Scanné avec CamScanner